Lundi 12 janvier 2026 Term Spé Maths 6

Devoir (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(12 points)*

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3\,x^2 + 5\,x + 1.$

1°) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2°) Etudier les variations de g sur $\mathbf{R}$.

3°) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbf{R}$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4°) En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x sur $\mathbf{R}$.

Partie B

Soit f la fonction deux fois dérivable et définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$

1°) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2°) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3°) Déterminer les variations de f et tracer son tableau de variations complet.

4°) On note f'' la fonction dérivée seconde de f, montrer que l'on peut écrire :

$$f''(x) = \frac{(x-1)\,g(x)\,e^x}{(x^2+1)^3}$$

5°) En déduire la convexité de f en fonction de x, et les coordonnées des points d'inflexion de sa courbe représentative.

6°) Tracer la courbe (C_f) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (**unité : 2 cm**)
Indiquer les asymptotes et les tangentes particulières à la courbe.

Exercice 2 *(8 points)*

Soient les points A(2 ; –3 ; –5), B(0 ; 1 ; –1), C(–3 ; 7 ; 5), D(–1 ; 2 ; 0), E(1 ; 3 ; 1) et F(3 ; 2 ; 1) dans un repère de l'espace.

1°) Démontrer que les points A, B, C sont alignés.

2°) Démontrer que les points A, B, D et E sont coplanaires.

3°) Démontrer que les points A, B, D et F ne sont pas coplanaires.

4°) Soient les droites :

$$(d_1) : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad (d_2) : \begin{cases} x = -5 + 2k \\ y = k \\ z = -2 + k \end{cases}, k \in \mathbf{R}$$

Démontrer que $(d_1) = (AB)$ et que $(d_2) = (DE)$.

5°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d_1) et (d_2).