

Devoir (1h50)
(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 (10 points)

On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.

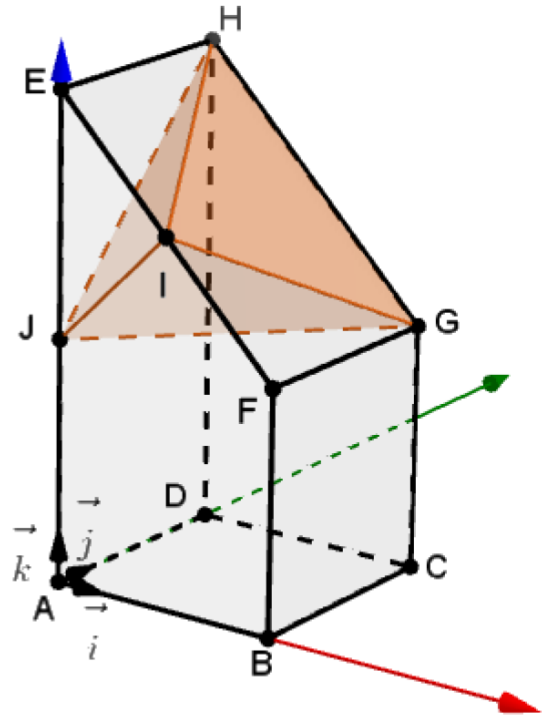
On associe à ce prisme le repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que :

$$\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} ; \vec{j} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} ; \vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE} .$$

De plus on a $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

On note I le milieu du segment [EF].

On note J le milieu du segment [AE].



- Donner les coordonnées des points I et J.
- Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).
 - Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite d , perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par H.
- On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).
Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\frac{8}{3} ; \frac{4}{3} ; \frac{16}{3}\right)$.
- Calculer la distance du point H au plan (IGJ).
- Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.
- En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}$$

Exercice 2 (10 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{4}x$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Partie A

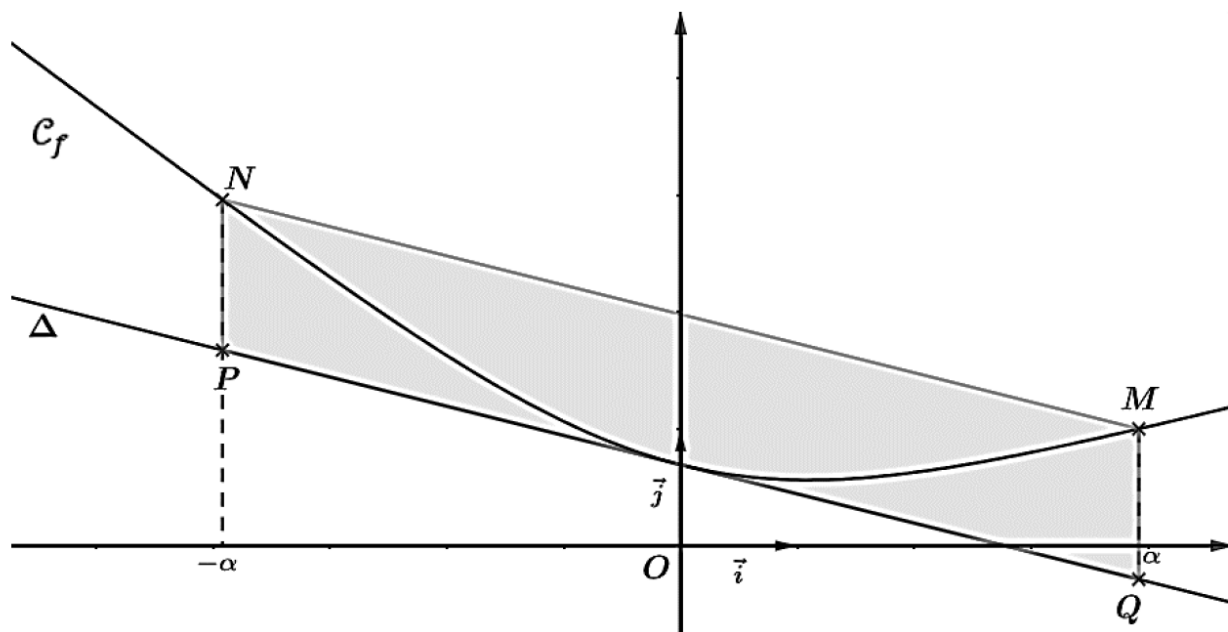
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{e^x - 3}{4(e^x + 1)}$.
 - En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
 - Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2 ; 5]$.

Partie B

On admettra que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

On note Δ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}_f$, la tangente Δ et le quadrilatère $MNPQ$ tel que M et N sont les deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives α et $-\alpha$, et Q et P sont les deux points de la droite Δ d'abscisses respectives α et $-\alpha$.



- Justifier le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
 - En déduire que la portion de la courbe $\mathcal{C}_f$, sur l'intervalle $[-\alpha ; \alpha]$, est inscrite dans le quadrilatère $MNPQ$.
- Montrer que $f(-\alpha) = \ln(e^{-\alpha} + 1) + \frac{3}{4}\alpha$
 - Démontrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.